ENS CACHAN A2

DURÉE : 4 heures.

Préliminaires

$\mathbb{R}^2$ sera muni de la norme euclidienne usuelle.
$\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes, à coefficients réels. Si $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup\{ \|Au\| \ ; \ u \in \mathbb{R}^2, \ \|u\| \leq 1 \}$$

Il est clair que $A \to \|A\|$ est une norme sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \|Au\| \leq \|A\| \ \|u\|$

b) En déduire que si A et $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$.

— A —

Dans cette partie, ainsi que dans toute la suite du problème, on adoptera les notations et conventions suivantes:

a) Les lettres x,y,z désigneront des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe C^2 et les lettres X,Y,Z désigneront respectivement les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, de composantes x,x' (resp. y,y'; z,z') où x',y',z' sont les dérivées respectives de x,y,z.

b) Une équation différentielle écrite sous la forme

$$z'' + pz' + qz = g$$
$$Z(t_0) = v$$

sous entendra que $t_0 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$, g,p,q (fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) sont fixés, z étant la fonction inconnue.
On posera alors $Z(t,t_0,v)$ = la valeur prise à $t \in \mathbb{R}$ par la fonction Z où z est la solution de cette équation différentielle.

1) On considère l'équation différentielle :

$$y''+y = 0$$
$$Y(t_0) = v$$

a) Calculer $Y(t,t_0,v)$.

b) Caractériser simplement la matrice $R(t,t_0)$ définie par

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad Y(t,t_0,v) = R(t,t_0)v$$

c) En déduire que $\forall (t,t_0,s) \in \mathbb{R}^3 \quad R(t,s) = R(t,t_0)R(t_0,s)$

Tournez la page S.V.P.

ENS CACHAN A2

d) Montrer que Y vérifie le système différentielle

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = v \end{cases}$$

(où A est une matrice que l'on déterminera)

En déduire que $\frac{\partial R}{\partial t} = AR$

2) Vérifier que la solution du système différentiel non homogène:

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = u \end{cases}$$

(où B est une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$)

est donnée par:

$$X(t,t_0,u) = R(t,t_0)u + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds$$

3) Soient p et q deux applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On cqnsidère l'équation différentielle:

$$\begin{cases} x'' + px' + (1+q)x = 0 \\ X(t_0) = u \end{cases}$$

a) Montrer que sa solution X vérifie l'équation intégrale :

$$X(t,t_0,u) = R(t,t_0)u + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\ M(s)\ X(s,t_0,u)\ ds$$

(où M(s) est une matrice que l'on déterminera)

b) En déduire que l'on a, pour $t \geq t_0$:

$$\|X(t,t_0,u)\| \leq \|u\| + \int_{t_0}^{t} a(s)\ \|X(s,t_0,u)\|\ ds$$

$$(\text{où } a(s)^2 = p^2(s) + q^2(s)$$

c) En s'aidant de la fonction d définie par :

$$d(t) = \|u\| + \int_{t_0}^{t} a(s)\ \|X(s,t_0,u)\|\ ds$$

montrer que l'on a, pour tout $t \geq t_0$:

$$\|X(t,t_0,u)\| \leq \|u\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds\right)$$

- B -

On suppose désormais que les fonctions p et q du A,3) sont absolument intégrables en + ∞. On pose

$$\varepsilon(t) = \int_t^{+\infty} a(s)\, ds$$

1) Montrer que $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

2) Montrer que l'intégrale $\int_t^{+\infty} R(t_0,s)\ M(s)\ X(s,t_0,u)\ ds$ est absolument convergente.

3) Expliquer pourquoi $X(t,t_0,u)$ est nécessairement linéaire en u.

On posera alors $X(t,t_0,u) = S(t,t_0)u$ où $S(t,t_0) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

4) Soit alors la matrice $H(t_0)$ définie par :

$$H(t_0) = I + \int_{t_0}^{+\infty} R(t_0,s)\ M(s)\ S(s,t_0)\ ds$$

(où I désigne la matrice identité)

a) Montrer que l'on peut écrire :

$$S(t,t_0) = R(t,t_0)H(t_0) + r(t,t_0)$$

où $r(t,t_0)$ est une matrice vérifiant $\| r(t,t_0)\| \leq e^{\varepsilon(t_0)}\ (1-e^{-\varepsilon(t)})$

b) Montrer que $Z(t) = R(t,t_0)H(t_0)u$ est la seule solution de l équation différentielle : $z'' + z = 0$, telle que $X(t,t_0,u) - Z(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $\| H(t_0)-I \| \leq e^{\varepsilon(t_0)} - 1$

6) En déduire que toute solution de $z''+z = 0$ est équivalente à l'infini à une solution de $x''+px'+(1+q)x = 0$.

-C-

On se propose ici d'estimer $S(t,t_0)$ et $H(t_0)$.

Comme t_0 sera fixé, il restera implicite dans les notations suivantes:

On pose $B(t) = R(t_0,t)\ M(t)\ R(t,t_0)$

$\sigma(t) = R(t_0,t)\ S(t,t_0)$

1) Montrer que l'on a

$$\sigma(t) = I + \int_{t_0}^{t} B(t_1)\sigma(t_1)\ dt_1$$

$$\sigma(+\infty) = H(t_0)$$

Tournez la page S.V.P.

ENSCACHAN A2

2) On pose:

$$N_0(t) = I \; ; \; N_1(t) = \int_{t_0}^{t} B(t_1)\, dt_1 \; ;$$

$$N_k(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} B(t_1)B(t_2)\ldots B(t_k)\, dt_k dt_{k-1}\ldots dt_1$$

et, pour tout entier k, $N_k = N_k(+\infty)$

Montrer que $\| \sigma(t) - \sum_{k=0}^{n} N_k(t) \| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{A(t)^k}{k!}$ (où $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$)

3) Montrer que $\| H(t_0) - \sum_{k=0}^{n} N_k \| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon(t_0)^k}{k!}$

4) Conclusion ?

- D -

On considère l'équation :

$$x'' + (1+ f(t))x = 0 \qquad (*)$$

On ne suppose pas que f est absolument intégrable en $+\infty$, mais l'on suppose que $\int_0^{+\infty} |f'(s)|\, ds < +\infty$ et qu'il existe c tel que pour tout $t \geq 0$, on ait $|f(t)| \leq c < 1$.

On pose $s(t) = \int_0^t (1 + f(s))^{1/2}\, ds \quad (t \geq 0)$

1) Montrer que la fonction s est strictement croissante.

2) On définit la fonction v sur $\mathbb{R}_+$ par :

$\forall\, t \geq 0$, $v(s(t)) = x(t)$ (où x est une solution donnée de (*)) .

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \geq 0 \; , \; p(s(t)) = \frac{1}{2} \frac{f'(t)}{(1+f(t))^{3/2}} \; .$$

a) Montrer que v vérifie :

$$v'' + pv' + v = 0$$

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} |p(s)|\, ds < +\infty$

3) Déduire alors de B) qu'asymptotiquement les fonctions solutions de (*) sont équivalentes à des fonctions du type:

$$a \cos\left(\int_0^t (1+f(s))^{1/2} ds + \phi\right) \qquad (a, \phi \in \mathbb{R}) \; .$$